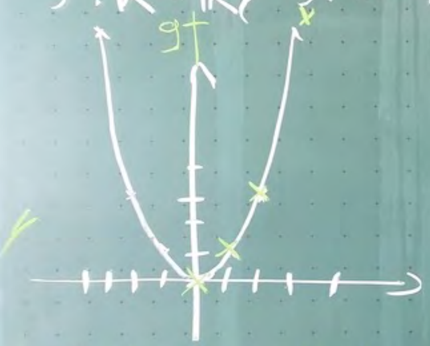
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$



$f: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0:\ f(n) = n^2$

$$f_1(n) = (n+1)^2 - (n-1)^2$$
$$= n^2 + 2n + 1$$
$$- (n^2 - 2n + 1)$$
$$= 4n$$

$$\underline{n}\cdot(n+1) + \underline{2}\cdot(n+1)$$
$$= (n+2)(n+1)$$

$= x^2$

$= n^2$

$A_2(n)$: $n^2 + n$ ist gerade

$\exists\, k \in \mathbb{N},\ n^2 + n = 2k$

$A_2(n+1)$: $(n+1)^2 + (n+1)$ gerade?

$$(n+1)^2 + (n+1)$$
$$= \underline{n^2} + 2n + 1 + \underline{n} + 1$$
$$= \underbrace{n^2 + n}_{2k} + \underbrace{2n+2}_{2\cdot(n+1)}$$
$$= 2\cdot(k + n + 1) \quad \checkmark$$

Verank.: $A_2(0)$: $0^2 + 0 = 0$ gerade

$A(k)$: Jedes quadr. Brett mit Breite $n = 2^k$ und einem vorbelegten Feld kann vollständig mit Trominos gepflastert werden.

Zeige: $A(k)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$

Ind. Verank.: $k = 0,\ n = 1$

Es gibt nur 1 Brett $\boxtimes$ ist schon gepfl.

Ind. Schritt: $k \to k+1$

$A(k)$ gilt.

Zeige $A(k+1)$

Sei B ein Brett mit Breite/Länge $n = 2^{k+1}$

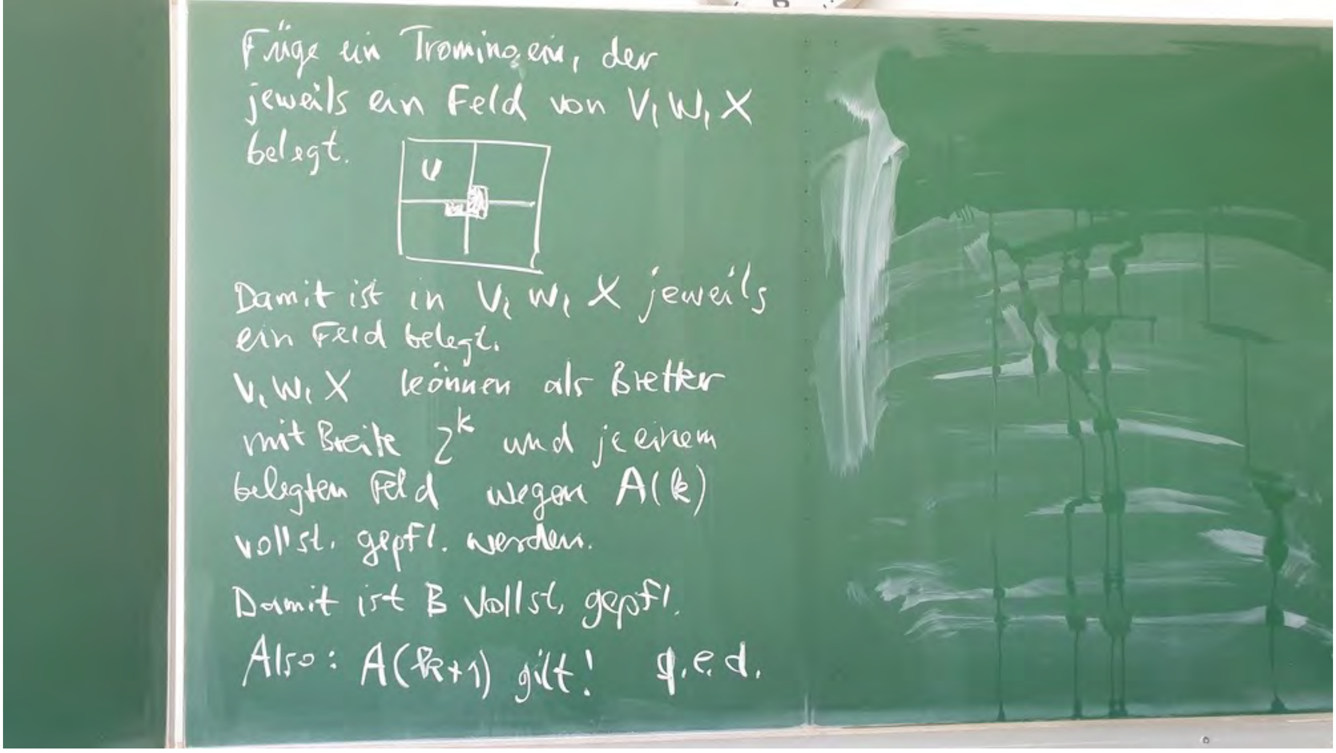
Das Brett hat 4 Quadranten

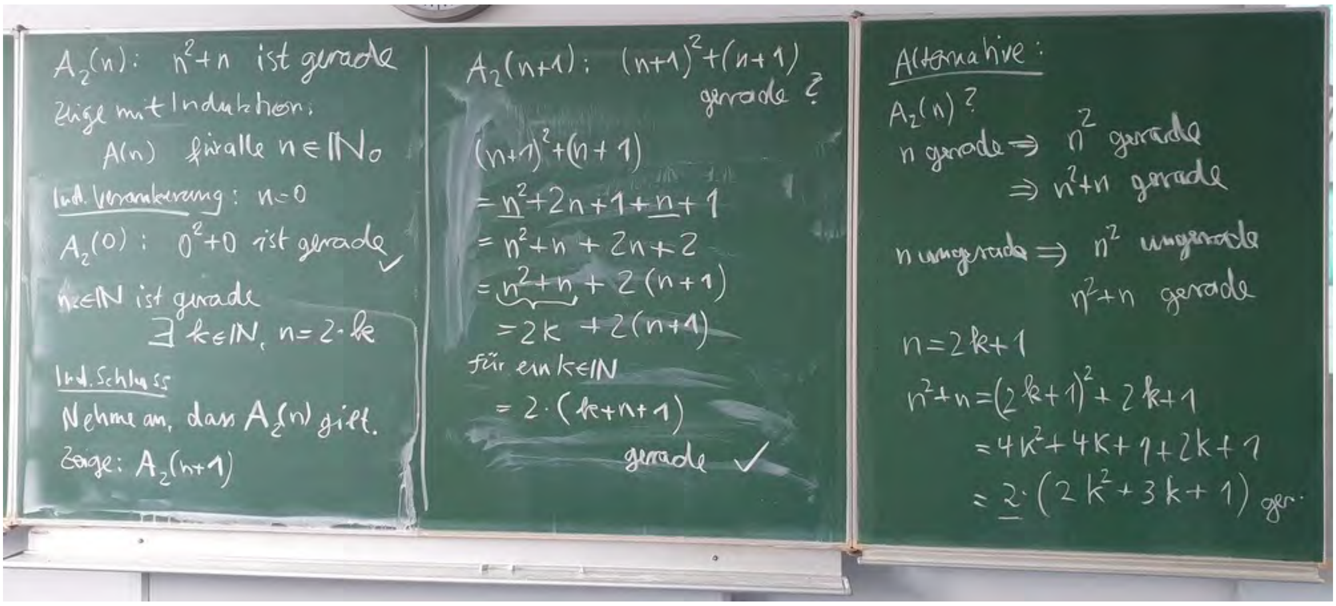
U	V
W	X

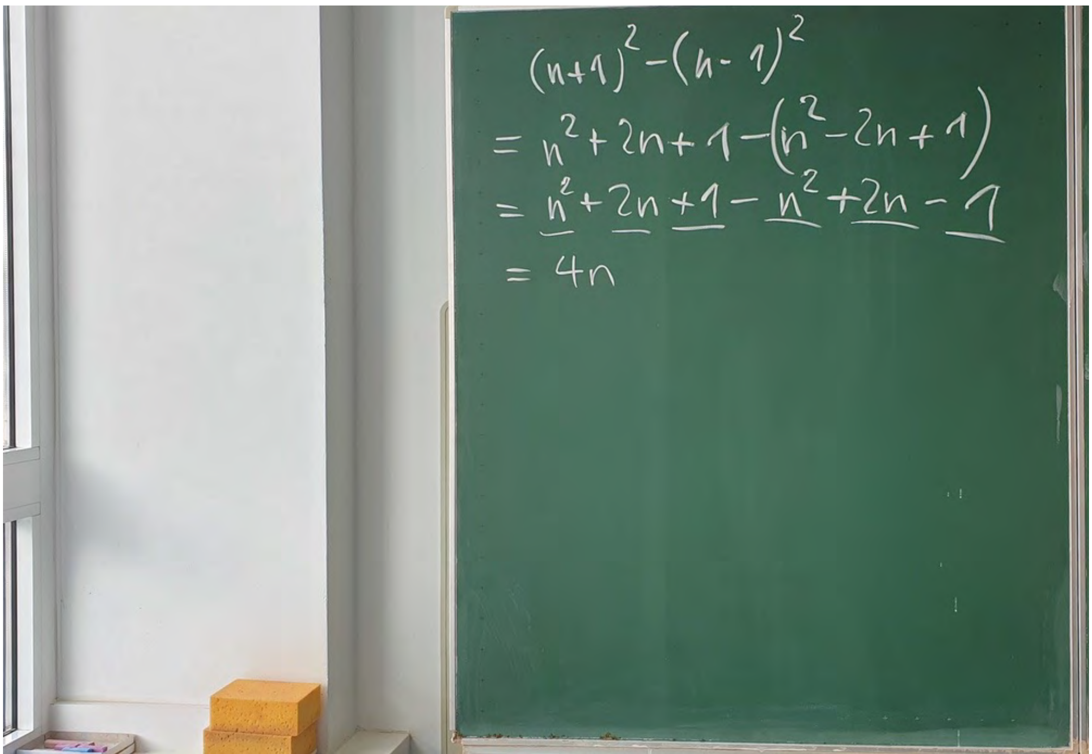
jeder Quadrant hat Länge 2^k

Rotiere, so dass U das belegte Feld enthält.

U kann wegen A(K) gepflastert werden


Füge ein Tromino ein, der
jeweils ein Feld von V, W, X
belegt.
V
Damit ist in V, W, X jeweils
ein Feld belegt.
V, W, X können als Bretter
mit Breite 2^k und je einem
belegten Feld wegen A(k)
vollst. gepfl. werden.
Damit ist B vollst. gepfl.
Also: A(k+1) gilt! q.e.d.


$A_2(n)$: n^2+n ist gerade
Zeige mit Induktion:
$A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$
Ind. Verankerung: $n=0$
$A_2(0)$: 0^2+0 ist gerade ✓
$n \in \mathbb{N}$ ist gerade
$\exists\, k \in \mathbb{N},\ n = 2 \cdot k$
Ind. Schluss
Nehme an, dass $A_2(n)$ gilt.
Zeige: $A_2(n+1)$
$A_2(n+1)$: $(n+1)^2+(n+1)$ gerade?
$(n+1)^2+(n+1)$
$= n^2+2n+1+n+1$
$= n^2+n+2n+2$
$= \underbrace{n^2+n}+2(n+1)$
$= 2k+2(n+1)$
für ein $k \in \mathbb{N}$
$= 2 \cdot (k+n+1)$
gerade ✓
Alternative:
$A_2(n)$?
n gerade $\Rightarrow n^2$ gerade
$\Rightarrow n^2+n$ gerade
n ungerade $\Rightarrow n^2$ ungerade
n^2+n gerade
$n=2k+1$
$n^2+n=(2k+1)^2+2k+1$
$=4k^2+4k+1+2k+1$
$=2 \cdot (2k^2+3k+1)$ ger.


$(n+1)^2-(n-1)^2$
$= n^2+2n+1-(n^2-2n+1)$
$= n^2+2n+1-n^2+2n-1$
$= 4n$

$A(k)$: Jedes $n \times n$-Brett mit $n = 2^k$ und genau einem belegten Feld lässt sich mit Trominos pflastern.

Beh.: Gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$

Induktion:

Veranf.: $k = 0$, $n = 1$

$\boxed{\times}$ ✓

Indukt. Schritt: $k \to k+1$

Annahme: Es gilt $A(k)$.

Zeige: $A(k+1)$.

Sei B ein Brett mit Länge $n = 2^{k+1}$

Rotiere B, so dass das belegte Feld links oben ist

B besteht aus Quadranten

$$B = \begin{array}{c|c} U & V \\ \hline W & X \end{array}$$

und U enthält ein belegtes Feld.

U ist Brett mit Länge 2^k

wegen $A(k)$ können wir U mit Trominos pflastern.

Füge 1 Tromino hinzu, der je ein Feld in V, W, X belegt.

Jetzt auch V, W, X Bretter mit Länge 2^k und je einem bel. Feld.

Wegen $A(k)$ können wir V, W, X (separat) pflastern

$\Rightarrow$ B komplett gepfl.

Rotiere B zurück